

# 基于二阶差商波动最小的坏点挑选 及曲线光顺算法

高学峰<sup>1)</sup> 田中旭<sup>2)</sup> 褚伟波<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(上海大学机电工程与自动化学院, 上海 200072) <sup>2)</sup>(上海交通大学内燃机研究所, 上海 200030)

**摘要** 针对2维数据坏点挑选问题,以节点二阶中心差商的波动最小为基础,首先构造了表征节点 $P_i$ 在提高样条曲线光顺度方面潜力大小的函数,然后给出了一种基于节点差商波动最小的坏点挑选算法。并将该算法利用一些实例与曲率极值法进行了对比分析,结果表明,该算法能有效标出坏点位置。另外,基于节点二阶中心差商波动最小的原则,还给出了一种通过将节点在允许范围内进行适当调整,以减小样条曲线二阶导函数波动的光顺处理算法。实例验证结果表明,此样条曲线光顺处理算法能够有效地控制三次样条曲线二阶导函数的波动,即能提高曲线的光顺程度。

**关键词** 坏点 光顺处理 三次样条曲线

**中图法分类号:** TP391.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2007)12-2184-05

## Bad Data Selecting and Curve Smoothing Arithmetic Based on Minimizing the Undulation of the Divided Difference

GAO Xue-feng<sup>1)</sup>, TIAN Zhong-xu<sup>2)</sup>, ZHU Wei-bo<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Machine Electric Engineering and Automation Shanghai University, Shanghai 200072)

<sup>2)</sup>(Internal Combustion Engine Institute Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

**Abstract** As to the selection of the 2D bad data, this paper used the method of minimizing the undulation of the divided difference of 2D data and presented an algorithm that begins with constructing a function that can compute each knot's potential on improving spline curve's smoothness. After analyzing some examples that using the extreme curvature-value method and the method stated previously, it indicated that the algorithm this paper put forwards marked the positions of the bad data efficiently. Based on the method of minimizing the undulation of the divided difference of 2D data, this paper also gave a smoothing treatment for cubic spline curve to appropriately relocate the positions of the knots in the permissible scope. The numerical example at the last section demonstrated that this algorithm can effectively control the undulation of the cubic spline's second-derivative function.

**Keywords** bad data, smoothing treatment, cubic spline curve

## 1 引言

测量数据中的坏点剔除和曲线光顺是反求工程以及CAD/CAM中的重要问题,因为它们决定着所构建零件中的曲面质量和精度。文献[1]中指出,天然的光顺指示函数曲率函数在应用中的以下

不便之处:复杂非线性、因多需人的介入而导致的自动化程度低、某些情况还要用到一套不系统的特殊规则等。此外,在曲线光顺问题中的很多算法由于要用极小变形能等复杂优化函数,因此调节量也是比较抽象。考虑到这些不便,本文探求了一种新的坏点挑选和曲线光顺算法。最终构造了基于节点二阶差商波动最小的坏点挑选算法和曲线光顺算法。

**基金项目:**国家自然科学基金项目(50475182);上海市自然科学基金项目(04ZR14053);上海市重大科技攻关项目(04dz12011)

**收稿日期:**2005-12-11;**改回日期:**2006-05-05

**第一作者简介:**高学峰(1980~),男,硕士研究生。主要研究方向为虚拟仿真。E-mail: xfgao@163.com

### 2 曲率极值法挑坏点实例

由于坏点往往会引起插值曲线曲率的波动,所以通常会用插值曲线节点处的曲率作为节点好坏程度的评价指标,下面通过例子探讨此算法特点。

图 1、图 2 分别给出了两组节点的三次样条插值曲线及节点处由对应的曲率连成的折线。

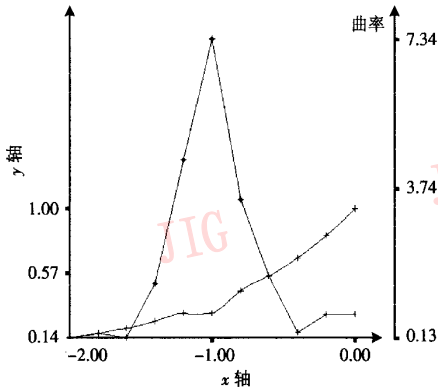


图 1 曲率极值法挑坏点

Fig.1 Extreme curvature-value method of selecting bad data

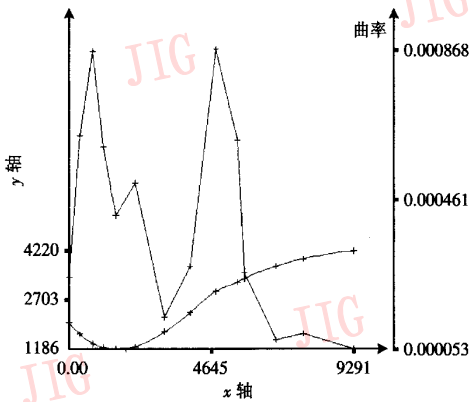


图 2 曲率极值法挑坏点

Fig.2 Extreme curvature-value method of selecting bad data

图 1 为自然对数函数在  $[-2, 0]$  上取的 11 个等距节点,其中第 6 个节点为  $(-1, 0.3)$ ,图 2 为实际工作(船体曲面逆向)中采集的一组船体栈线数据。

图 1 中的样条曲线明显不光顺,虽曲率折线峰值标出了坏点位置,但坏点附近的点也有较大曲率;图 2 中的曲率折线无明显峰值,不仅节点曲率在平均曲率以上和以下的点数几乎相等,且各点曲率均已小于 0.001。可见应用曲率法挑选坏点有时不是

十分奏效。

### 3 基于节点二阶差商波动最小的坏点挑选算法

光顺概念涉及审美,有一定主观色彩。苏步青和刘鼎元曾有以下光顺准则:曲线  $C^2$  连续,且曲率变化比较均匀<sup>[2]</sup>。文献[1]指出了函数曲率同二阶导数的紧密关系,为便于处理,本文取插值曲线二阶导函数变化均匀作为光顺准则。另外,坏点概念也有主观色彩,这里取严重影响插值曲线光顺性的点为坏点。

插值曲线的导函数和节点的插商有密切关系,设  $f(x)$  在包含互异节点  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$  的闭区间  $[a, b]$  上有  $n$  阶导数,则  $n$  阶插商与  $n$  阶导数之间有如下关系<sup>[3]</sup>:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \xi \in (a, b) \quad (1)$$

所以节点插商体现了插值函数导数的特征,基于此,对图 1 中所用节点做如下分析:图 3 绘出了节点的三次样条插值曲线的一阶导函数,横线表示的是节点的一阶插商。图 4 绘出了节点的三次样条插值曲线的二阶导函数,横线表示的是节点的二阶插商的 2 倍。

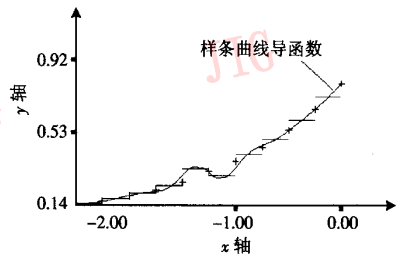


图 3 样条曲线的一阶导函数、节点的一阶插商  
Fig.3 The first-derivative function of cubic spline and 1st order difference of knobs

由图 3、图 4 可以看出,在第 6 个节点处三次样条插值曲线的一阶、二阶导函数和一、二阶插商有较明显的波动。

本算法就是尝试把最能引起这种波动的点,也即在减少这种波动方面潜力最大的点“提取”出来而形成的坏点挑选算法。

#### 3.1 算法实现

基于以上分析,即可给出第  $i$  个节点  $p_i = (x_i,$

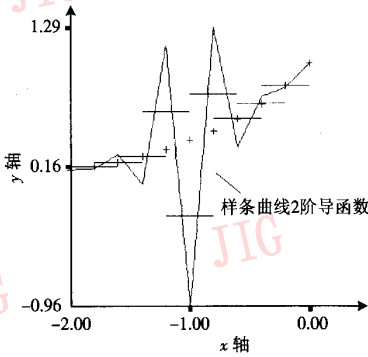


图 4 节点二阶插商的 2 倍、样条曲线的二阶导函数  
Fig. 4 The second-derivative function of cubic spline and twice the 2st order difference of knobs

$y_i$ ) 对应“坏”的程度的评价指标为

$$F(p_i) = \frac{F_{ori}(p_i)}{F_{opt}(p_i)} \quad (2)$$

$$F_{ori}(p_i) = S(f[p_{i-2}, p_{i-1}, p_i], f[p_{i-1}, p_i, p_{i+1}], f[p_i, p_{i+1}, p_{i+2}]) \quad (3)$$

$$F_{opt}(p_i) = S(f[p_{i-2}, p_{i-1}, \hat{p}_i], f[p_{i-1}, \hat{p}_i, p_{i+1}], f[\hat{p}_i, p_{i+1}, p_{i+2}]) \quad (4)$$

式中, 函数  $S(X_1, X_2, X_3)$  表示 3 个数的方差, 即

$$S(X_1, X_2, X_3) = \sqrt{\frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^3 \left( X_i - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 X_j \right)^2 \right)} \quad (5)$$

函数  $f[p_1, p_2, p_3]$  表示点  $p_2$  的二阶中心插商为

$$f[p_1, p_2, p_3] = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} \quad (6)$$

当  $i=3, 4, \dots, n-2$  时, 式(4)中  $\hat{p}_i = (x_i, y)$  为横坐标与点  $p_i$  的横坐标相同, 纵坐标为使式(4)取得最小值的点。

下面求点  $\hat{p}_i$ , 令

$$\frac{d}{dy} (S(f[p_{i-2}, p_{i-1}, \hat{p}_i], f[p_{i-1}, \hat{p}_i, p_{i+1}], f[\hat{p}_i, p_{i+1}, p_{i+2}])) = 0 \quad (7)$$

则可以解出

$$y = \sum_{j=-2, j \neq 0}^2 \left( y_{i+j} \frac{\prod_{k=-2, k \neq j, k \neq 0}^2 (x_i - x_{i+k})}{\prod_{k=-2, k \neq j, k \neq 0}^2 (x_{i+j} - x_{i+k})} \right) \quad (8)$$

由上式可以看出,  $\hat{p}_i$  就是过  $p_{i-2}, p_{i-1}, p_{i+1}, p_{i+2}$  的三次插值多项式上横坐标为  $x_i$  的点。

当  $i=1, 2, n-1, n$  时, 类比上面形式, 取  $\hat{p}_i$  为过  $p_2, p_3, p_4, p_5$  的三次插值多项式在  $x_1$  处对应的点, 则点  $p_1$  坏程度的评价指标为

$$F(p_1) = \frac{S(f[p_1, \hat{p}_1, p_2, p_3], f[p_2, p_3, p_4], f[p_3, p_4, p_5])}{S(f[\hat{p}_1, p_2, p_3], f[p_2, p_3, p_4], f[p_3, p_4, p_5])}$$

而  $F(p_2), \dots, F(p_{n-1}), F(p_n)$  可同样处理。

式(4)中, 若过  $p_{i-2}, p_{i-1}, p_{i+1}, p_{i+2}$  有一条二阶导函数为常数的曲线(即这 4 点共一条低于 3 次的曲线), 分母就会为零, 则使算法失效。鉴于此, 需做如下处理, 记

$$\hat{F}_{opt} = \min \left\{ F_{opt}(p_i) \mid F_{opt}(p_i) > 0.05 \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n F_{opt}(p_j) \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

然后执行图 5 流程。

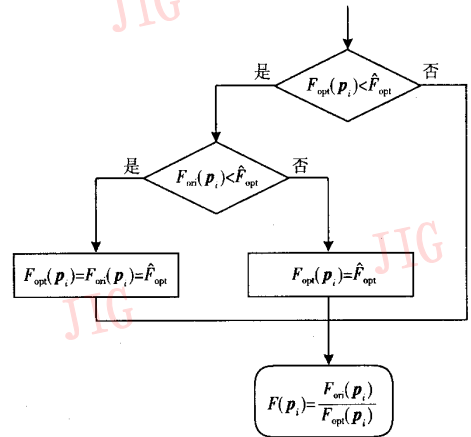


图 5 预防分母过小的辅助流程

Fig. 5 Process ensuring the denominator reasonable

若把坏点看作是一种提高曲线光顺程度方面很有潜力的点, 以二阶导函数波动最小为光顺准则, 则  $F_{ori}(p_i), F_{opt}(p_i)$  恰好分别对应了将  $p_i$  更换为其最优节点  $\hat{p}_i$  前后此局部的光顺程度:  $F_{ori}(p_i)$  体现的是此局部初始情况下的光顺程度,  $F_{opt}(p_i)$  体现的是只改变  $p_i$  时, 此局部所能达到的最佳光顺程度。所以二者的商  $F(p_i)$  就体现了点  $p_i$  在提高曲线光顺程度方面潜力的大小。这就是本坏点挑选算法的核心思想。

### 3.2 实例验证及结论

图 6、图 7 给出了对应图 1、图 2 所用两组节点的三次样条插值曲线, 及本坏点挑选算法求得的  $F(p_i)$  连成的折线图。

由图 6、图 7 可见, 新算法用尖锐的峰值清晰地标出了导致三次样条曲线二阶导函数波动的点, 这说明应用式(2)给出的判断坏点的标准是非常有效的。

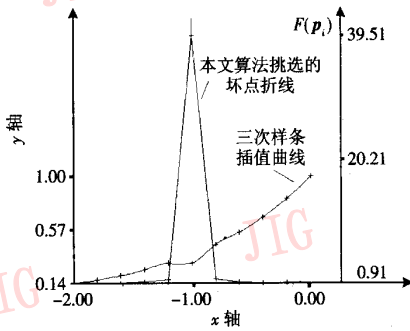


图 6 基于节点差商波动最小的坏点挑选算法挑选的坏点  
Fig. 6 Selecting bad data using the method based on minimizing the undulation of the divided difference

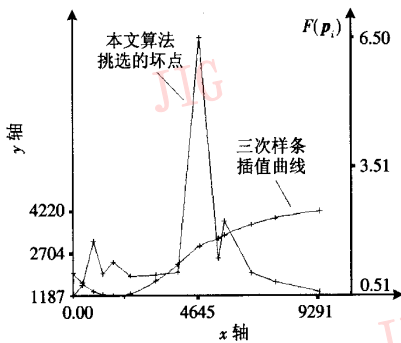


图 7 基于节点差商波动最小的坏点挑选算法挑选的坏点  
Fig. 7 Selecting bad data using the method based on minimizing the undulation of the divided difference

### 3.3 算法相关

以上验证过程中,用到了三次样条插值函数,获得三次样条插值函数需要给定两个边界条件,其通常为自由边界或导数边界;依据实际问题,前者是直接取端点的二阶导数为零,后者是给出边界导数值,但有些时候不够方便。

本文的三次样条插值函数边界条件为

设  $M_1, M_n$  为构造三次样条插值函数时用的二阶导数边界,其中  $M_1$  取过  $(x_2, 2 \times f[p_1, p_2, p_3])$ ,  $(x_3, 2 \times f[p_2, p_3, p_4])$ ,  $(x_4, 2 \times f[p_3, p_4, p_5])$  3 点的二次插值函数在  $x_1$  处的值,  $M_n$  同样处理。

## 4 基于节点二阶差商波动最小的误差限内曲线光顺处理算法

实际处理中,除了由于偶然因素引起的坏点对生成的曲线质量有影响外,测量数据的舍入误差也影响着插值曲线的光顺程度。因此,很多情况下,可

以将节点在允许的范围(如测量误差限)内做适当调整,以便使生成插值曲线更光顺。

本算法就是以使节点二阶中心差商波动最小为控制手段而实现的一种误差限内曲线光顺处理算法。

### 4.1 算法实现

如前所述,点  $\hat{p}_i$  是根据  $p_{i-2}, p_{i-1}, \hat{p}_i, p_{i+1}, p_{i+2}$  组成的 3 个二阶插商的方差最小求得,与  $p_i$  相比,更能减小此局部内插值曲线的二阶导数的波动。

设  $e_i = \hat{p}_i - p_i$  为第  $i$  个点  $p_i$  的修正向量,第  $i$  个点纵坐标的测量误差或者允许范围是  $y_i \pm \delta$ ,则点  $p_i = (x_i, y_i)$  修正后为

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i &= (x_i, \tilde{y}_i) \\ \tilde{p}_i &= p_i + \lambda e_i \end{aligned} \tag{10}$$

式中,  $\lambda$  为修正深度比例系数,取 0 ~ 1 之间的常数。这里借鉴了文献[4]中逐步择优的思想方法。

在修正过程中,当  $\tilde{y}_i \geq y_i + \delta$  时,取  $\tilde{y}_i = y_i + \delta$ ,当  $\tilde{y}_i \leq y_i - \delta$  时,取  $\tilde{y}_i = y_i - \delta$ ,依次修正每个数据点(如图 8 所示),即形成一组新的 2 维数据。

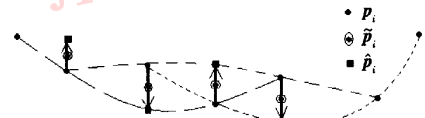


图 8 光顺算法示意图

Fig. 8 Sketch map of smoothing arithmetic

重复以上过程,直到相邻两次修正结果相差不大时,即可结束光顺处理(可用  $\max\{e_i\}$  判断)。

### 4.2 实例验证及结论

设有一组数据:  $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 17)$ , 这组节点即为曲线  $y = \sin(x)$  在区间  $[0, 3.2]$  上取的 17 个等距节点,所有数据保留 2 位有效数字,  $\delta = 0.005$ 。

图 9 绘制了节点的样条曲线及其一阶、二阶导函数图。

$\delta = 0.005$ , 取  $\lambda = 0.1$ , 使用本文光顺算法进行处理,图 10 ~ 图 12 分别为经 5 次迭代、10 次迭代和最终的迭代结果。

图 9 绘出了保留 2 位有效数字的结点的三次样条插值函数的二阶导函数有锯齿状剧烈波动,经过本文光顺处理后(如图 12 所示),完全消除了插值函数的二阶导函数这种锯齿状波动,这说明本文光顺算法能有效控制样条插值曲线的二阶导函数的波动。

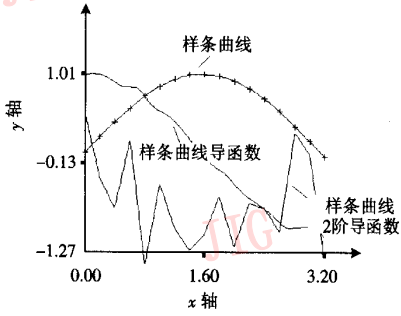


图 9 样条曲线及其一、二阶导函数

Fig.9 Cubic spline and its first and second derivative function

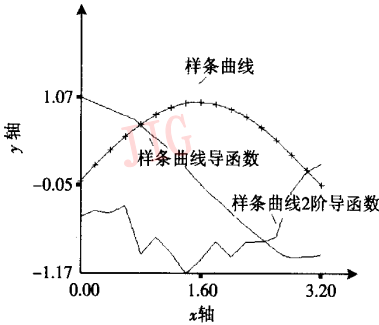


图 10 经 5 次光滑迭代结果

Fig.10 After the fifth iteration

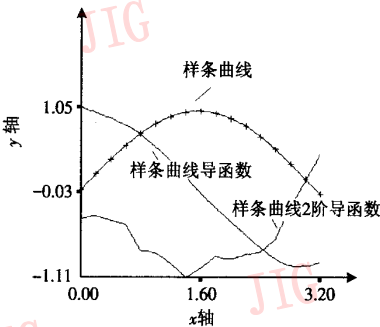


图 11 经 10 次光滑迭代结果

Fig.11 After the 10th iteration

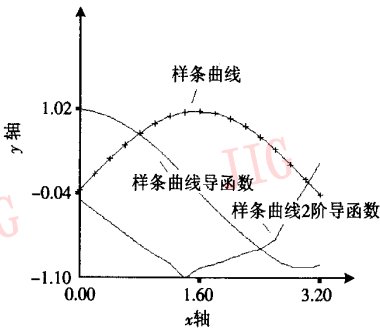


图 12 最终光滑处理结果

Fig.12 The final result of smoothing arithmetic

### 5 结 论

本文给出的基于节点二阶中心差商波动最小的坏点挑选算法比曲率极值法更能准确标出坏点位置;本文给出的基于节点差商波动最小的误差限内样条曲线光滑处理算法,不仅形式简单、几何意义明确,而且能有效地减小曲线二阶导函数的波动,使曲线更加光滑。

### 参考文献 (References)

- 1 Dong Guang-chang, Wu Ming-hua, Hong An-xiang. Analysis of mathematical model for spline fairing [ J ]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2003, 18(4): 377 ~ 382. [董光昌, 吴明华, 洪安祥. 样条曲线光滑的数学模型分析 [ J ]. 高校应用数学学报 A 辑, 2003, 18(4): 377 ~ 382. ]
- 2 Su Bu-qing, Liu Ding-yuan. Computational Geometry [ M ]. Shanghai: Shanghai Science Technology Press ( in Chinese ), 1981. [苏步青, 刘鼎元. 计算几何 [ M ]. 上海: 上海科学技术出版社, 1981. ]
- 3 Xiao Xiao-nan, Zhao Lai-jun, Dang Lin-li. Modern Numerical Calculation [ M ]. Beijing: Peking University Press, 2003: 153. [肖筱南, 赵来军, 党林立. 现代数值计算方法 [ M ]. 北京: 北京大学出版社, 2003: 153. ]
- 4 Liu Zhang-wen, Ren Tian-yi, Gu Tian-xiang. Determination of confidence interval of 3-D data and repair of abnormal data [ J ]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2005, 11(4): 597 ~ 600. [刘章文, 任天怡, 古天祥. 3 维数据的置信区间及异常数据的修复 [ J ]. 计算机集成制造系统, 2005, 11(4): 597 ~ 600. ]